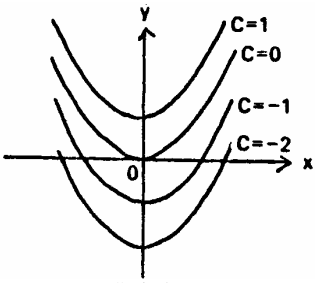
单元 **9**：积分法

特定目标：

1. 认识不定积分法为微分法的逆运算。
2. 理解不定积分的性质。
3. 认识不定积分法在几何及物理上的一些应用。
4. 认识及应用不定积分法的标准公式与及代换法。
5. 理解以定积分作为一个总和的极限的基本原理。
6. 理解及应用定积分的基本性质。
7. 应用定积分去求平面面积及旋转体体积。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
9.1 不定积分	~~1~~ 2	不定积分可以求导数的逆运算作为介绍，并引出下列简易性质： $\int (u \pm v)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$ 及 $\int ku\,dx = k\int u\,dx$ 介绍「原函数」、「积分符号」、「被积函数」及「积分常数」等名词。教师应强调积分 $\int u\,dx$ 仅为一个符号而并不代表把 u 乘以 dx。
9.2 函数的积分法及简易应用	~~4~~ 5	应提供适量例题及练习，使学生熟习下列积分公式： $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ (应加以讨论 $n = 0$ 的情形) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$ $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

表示删去的内容

内 容	时间分配	教 学 建 议
86		$\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$ 上列被积函数并不包括 $\frac{1}{x}$ 和指数 e^x 。教师应强调在大多情况下，被积函数都须略加改动，才能成功导出积分。例如： $\int \sqrt{x}(2-x)\,dx = \int (2\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}})dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$ $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ $\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + C$ 等。 在几何应用上，学生应了解一条曲线的形状，乃取决于其在定义域内每点的斜率，而其对应于坐标轴的位置，则决定于积分常数。由此，同一函数的两个原函数，最多只能相差一常数值。事实上函数 y=f(x)+C 代表着一曲线族而 y=f(x)只是该曲线族内的一员。下图是一个例子：  曲线族 $y = x^2 + C$ 在物理应用上，应包括 $s = \int v\,dt$ 及 $v = \int a\,dt$ 的公式。以下是一个例子。

内 容	时间分配	教 学 建 议
87 **9.3** 积分法基本技巧 学生只须了解下列公式而无需学习代换积分法。 $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, n \neq -1$ $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$ $\int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$ 教师可利用微分法验证上述公式。	~~9~~ 3	*例* 一质点以$a = 4t - 3\,ms^{-2}$的加速度沿一直线移动，其中t秒为其经过点O后的时间。当 t = 3 时，质点的速度为 12 ms^{-1}。求当 t = 4 时质点的速度及在此 4 秒内所走的路程。 在这个例子中，教师应引导学生观察两个初值条件： v = 12 当 t = 3 及 s = 0 (在 O 点) 当 t = 0。 (1) *代换法* 教师应强调由于 $F = \int f(x)\,dx$ 是 x 的函数而 x 是 u 的函数，所以 F 可被间接看成是 u 的函数，从而可求出其对 u 的导数。由链式法则： $\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{du} = f(g(u))g'(u)$ 所以若以 u 表 F，则 F 为 $\int f(g(u))g'(u)\,du$ 。多样化的例子在这儿非常有用。 *例一* 取 $u = 2x - 7$ ，则 $\int \frac{1}{(2x-7)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{2}du = -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2x-7} + C$ 应用 $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, n \neq -1$ *例二* 取 $u = 4x$ ，则 $\int \cos 4x \, dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C$ 应用 $\int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$

表示删去的内容

内 容	时间分配	教 学 建 议

88

在学生掌握技巧之后，教师可鼓励他们省去直接写出变量 u 的步骤。故此上面两例题可以下列方式完成：

$$\int \frac{1}{(2x-7)^2}dx = \int \frac{1}{(2x-7)^2}d(2x-7) = \frac{-1}{2x-7}+C$$

$$\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\int \cos 4x\,d(4x) = \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

例三

对于像 $\frac{x^2-2x}{x^2-2x+1}$ 一类的被积函数，教师可引导学生进行运算如下：

$$\int \frac{x^2-2x}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{(x^2-2x+1)-1}{x^2-2x+1}dx = \int\left[1-\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx = 1+\frac{1}{x-1}+C$$

应用 $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$, $n \neq -1$

学生无须知道把此类函数化成部分分数的一般方法，但若给出扩展式，学生应能求出各常数值，进而求解不定积分。

(2) *三角函数的积分法*

(*a*) 形式如 $\int \sin mx \cos nx\,dx$，$\int \cos mx \cos nx\,dx$ 及 $\int \sin mx \sin nx\,dx$ 的积分。

在处理这类积分之前，教师应与学生全面温习半角公式、和积互化公式等三角恒等式。典型的例子有 $\int \sin 4x \cos 6x\,dx$ 及 $\int \cos^3 x\,dx$。

(*b*) 形式如 $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$，$\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ 及 $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x\,dx$ 的简易积分。积分过程不涉及代换法。

学生应熟识各种三角恒等式及代换法，典型例子包括 $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$。

$\int \cos^5 2x\,dx$，$\int \tan^3 x \sec^2 x\,dx$，$\int \sec^4 \frac{1}{2}x\,dx$，$\int \operatorname{cosec}^3 x \cot^3 x\,dx$ 等。

(*c*) 对于其它三角被积函数，例如 $\frac{1}{a+b\cos x}$；可以代换 $t = \tan\frac{x}{2}$ 作为一般方法分绍。

内 容	时间分配	教 学 建 议

89

例

以代换 $t = \tan\frac{\theta}{2}$ 计算 $\int \frac{1}{1+\cos\theta}d\theta$。

教师可引导学生推出：

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ 及 } d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$$

直接代入原式，学生应不难导出

$$\int \frac{1}{1+\cos\theta}d\theta = \int dt = t + C = \tan\frac{\theta}{2}+C$$

(3) *三角代换法*

这方法通常应用于 $\sqrt{a^2-x^2}$、$\sqrt{a^2+x^2}$ 及 $\sqrt{x^2-a^2}$ 形式的式中，藉以消去 $\sqrt{}$ 符号。

学生应知道可分别以 $x = a\sin\theta$ (或 $a\cos\theta$)，$x = a\tan\theta$ 及 $x = a\sec\theta$ 代入计算。教师应提供适量的例题及练习帮助学生熟习技巧。典型的例子有

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$，$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$，$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx$，及 $\int \frac{2x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx$。

(4) *简易归约公式*

分部积分法并不需要但宜给予学生简易归约公式作为求导逆运算的积分例题。下列显示其方法。

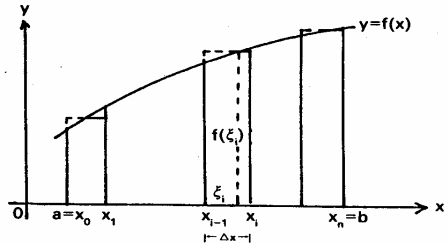
例

(*a*) 证明 $\frac{d}{dx}(\sin^{n-1}x\cos x) = (n-1)\sin^{n-2}x - n\sin^n x$

(*b*) 设 I_n 代表积分 $\int \sin^n x\,dx$，证明

$$I_n = \frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

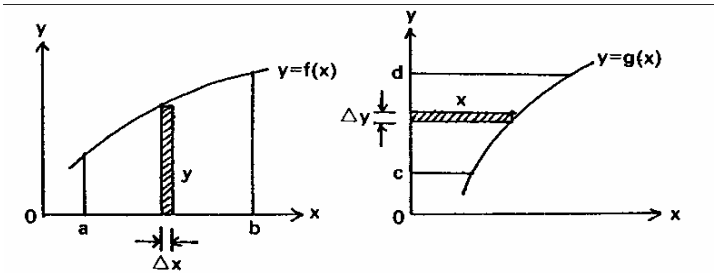
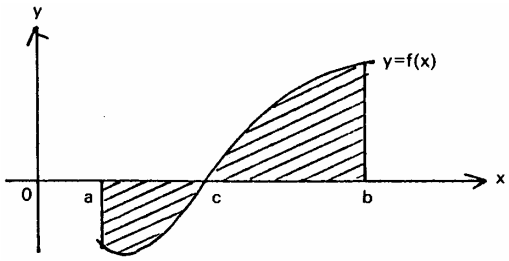
表示删去的内容

内 容	时间分配	教 学 建 议
9.4 定积分 本细项只应用细项9.1至9.3所学的技巧。	2	(*c*) 由此计算I_3及I_4。 由于积分法是微积分学中极重要的一环，故此需要有充分的练习使学生掌握技术。 利用下图及面积的概念，定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 可定义为 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限，即 $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$ ，其中 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  应明确指出定积分的简易性质： (1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (3) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ (5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (6) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$

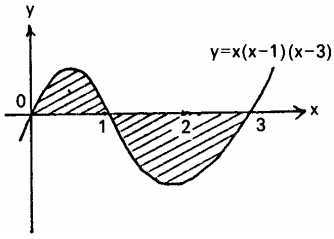
内 容	时间分配	教 学 建 议
9.5 定积分的计算 本细项只应用细项9.1至9.3所学的技巧。	~~4~~ 3	从定积分的定义看来，这些性质都是显见的，然而教师无须加以证明。 对能力较高的学生，可对以下的性质及其推论加以讨论： 若 f 连续，且在闭区间 [a, b] 内非负，则 $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ 。等式成立的必要条件为对闭区间 [a, b] 内所有的 x 值， $f(x) = 0$ 。 推论： $f(x) \geq g(x)$ 蕴涵 $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ 教师可介绍 $\int_a^x f(t)\,dt$ 为正值连续函数 $y = f(t)$，t 轴，直线 $t = a$ 及 $t = x$ 所包围的图形的面积。并建立公式 $\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$ ，其中 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ 。应提供例子帮助学生了解该公式。 *例一* $\int_1^2 (x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$ *例二* $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)\,d\theta$ 其中 $x = \sin\theta$ $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta$ $= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{\pi}{4}$ 由于代换法常被应用于定积分之计值(如上述例二)，教师应经常提醒学生代换法。在代换被积函数的同时，积分的上下限也要相应地作出变动，至于被积函数的值域，老师或可指出常被学生忽视的性质如

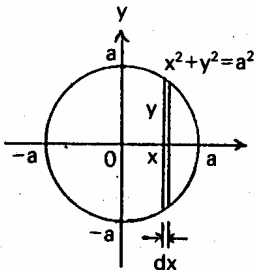
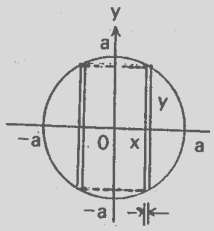
表示删去的内容

内 容	时间分配	教 学 建 议
92 9.6 定积分的应用	~~8~~ 7	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\cos^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x\,dx$ 可引进具备特殊性质的被积函数，作为有挑战性的例子。 *例三* $\sin^5 x\cos x$为奇函数，因其满足条件 $f(-x) = -f(x)$。 由此，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x\,dx$ 可写成 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^5 x\cos x\,dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x\,dx$ $= 0$ 也可用类似的方法透过例题介绍偶函数的积法。 *例四* 对于 $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ 一类的积分，老师可先引导学生证明以下性质 若 $f(a+b-x) = f(x)$，则有 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\,dx$ 及 $\int_a^b xf(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$ 然后代入 $a = 0$，$b = \pi$ 及 $f(x) = \sin x$，积分 $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ 的值。 由 9.4 节可导出 $A = \int_a^b y\,dx$ 或 $A = \int_c^d x\,dy$ 等公式。下列两图有助于记忆上述公式。

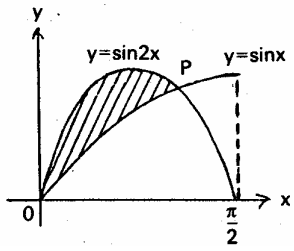
内 容	时间分配	教 学 建 议
93 在计算体积时，学生祇需考虑以 x 轴或 y 轴作旋转轴的情况。		 教师应透过例题引导学生探讨当部分曲线 $y = f(x)$ 低于 x 轴时所发生之情形，如下图所示。此时，$\int_a^b f(x)\,dx$ 只会给出由 a 至 b 面积的代数和。  为了避免误导的结果，可鼓励学生在计算面积之前，先划出相关的草图。并且将所求的面积应分为两个部分(见上图)，先求 f(x)由 a 至 c 及由 c 至 b 的积分而后把两部分的绝对值相加求出所需答案。下例可用作说明。

表示删去的内容

内 容	时间分配	教 学 建 议
		例 求曲线 $y = x(x-1)(x-3)$ 及 x 轴所围成之图形面积。 在例中，可要求学生自己绘出草图。 然后， $\int_0^1 x(x-1)(x-3)\,dx = \frac{5}{12}$ $\int_1^3 x(x-1)(x-3)\,dx = -\frac{8}{3}$ 由此，所需面积为 $\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$  对于公式 $A=\int_a^b (y_1-y_2)\,dx$ 及 $A=\int_c^d (x_1-x_2)\,dy$，建议用 $\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(y_{1i}-y_{2i})\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \int_a^b g(x)\,dx$ 的方法，藉以提醒学生总和的极限及定积分之间的关系。 例题如 $y^2=4x$ 及 $y=2x-4$ 所围面积；$y=\sin x$ 及 $y=\cos x$，$0\le x\le 2\pi$，所围面积等，可用作说明。

内 容	时间分配	教 学 建 议
		不需要教授 $A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$ 的公式以及当 x 与 y 同时都以第三参数 t 表达的情况。 可用类似的方法处理绕着坐标轴或平行于坐标轴的直线旋转而成的旋转体及空心旋转体的体积。学生需要学习圆盘法。对能力较高的学生，也可视情况引进圆柱外壳法。下为一例。 *例* 求半径为 *a* 之球体体积。 将球体视为一半径为 *a* 的圆形所产生的旋转体。 应用圆盘法： 球体体积 $=\int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx$ $=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-x^2)\,dx$ $=\frac{4\pi a^3}{3}$  同样亦可应用圆柱外壳法： 球体体积 $=\int_0^a 2\pi x\cdot 2y\cdot dx$ $=\int_0^a 4\pi x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $=\frac{4\pi}{3}a^3$ 

表示删去的内容

内 容	时间分配	教 学 建 议
		应给予学生适量的例题。圆锥体体积、球体体积等，都是有趣的例子。 学生应留意到解答这类题目时，经常要找寻曲线与坐标轴、和曲线与曲线之间的交点。为此，事先描绘各有关曲线草图，有助于解答问题。 *例* 在图中，曲线 $y = \sin 2x$ 及 $y = \sin x$ 相交于 P 点。试求 P 的坐标，并以此求阴影部分绕 x-轴旋转所成旋转体的体积。 
	28	

表示删去的内容